第2講　n 乗計算

2

［A］ 次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，n は自然数とする．

(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ を示せ．

(2) $\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$ を示せ．

(3) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ を示せ．

(4) $(1+i)^{10}$ を求めよ．

(5) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}$ を求めよ．

［B］ $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき

$$1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}$$

の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　$\boldsymbol{n}$ 乗計算

2　$z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ とするとき $1+z^{100}+z^{200}$ の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　n 乗計算

2

［A］ 次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，n は自然数とする．

(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ を示せ．

(2) $\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$ を示せ．

(3) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ を示せ．

(4) $(1+i)^{10}$ を求めよ．

(5) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}$ を求めよ．

［B］ $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき

$$1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}$$

の値を求めよ．

【答】 ［A］ (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) $32i$　(5) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

［B］ 0

【解説】 ［A］ (1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$$=\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

(2)

$$\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}\times\frac{\cos\beta-i\sin\beta}{\cos\beta-i\sin\beta}$$
$$=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\{\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)\}}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}$$
$$=\frac{\cos\{\alpha+(-\beta)\}+i\sin\{\alpha+(-\beta)\}}{1}$$
$$=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$$

(3) $n=1$ のとき，(左辺)$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^1$，(右辺)$=\cos1\alpha+i\sin1\alpha$ より (左辺)$=$(右辺) である．

ここで $n=k(\geqq1)$ のとき $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k=\cos k\alpha+i\sin k\alpha$ が成り立つと仮定すると，

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{k+1}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k\times(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=(\cos k\alpha+i\sin k\alpha)\times(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=\cos(k\alpha+\alpha)+i\sin(k\alpha+\alpha)$$
$$=\cos(k+1)\alpha+i\sin(k+1)\alpha$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成立する．

よって数学的帰納法により $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ は示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)

$$(1+i)^{10}=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{10}$$

$$=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$$

$$=2^5\left(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$=32\times i=\boldsymbol{32i}$$

(5)

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}$$

$$=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

［B］　$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\neq 1$ より $1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}=\dfrac{1-z^{2001}}{1-z}$ と変形できる.

ここで $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ より

$z^{2001}=\cos\dfrac{4002}{3}\pi+i\sin\dfrac{4002}{3}\pi=\cos 1334\pi+i\sin 1334\pi=1$ を得るので

$\dfrac{1-z^{2001}}{1-z}=0$ となる.

よって $1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}=\boldsymbol{0}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　n 乗計算

[2] $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ とするとき $1+z^{100}+z^{200}$ の値を求めよ.

【答】 0

【解説】 $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ より

$z^{100}=\cos\dfrac{100}{6}\pi+i\sin\dfrac{100}{6}\pi=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$,

$z^{200}=\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)^2=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$ となるので

$$\begin{aligned}1+z^{100}+z^{200}&=1+\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)+\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。